Volume de Sólidos

Principio de Cavalieri

Volume

- Entenderemos por sólido qualquer um dos seguintes subconjuntos do espaço: cilindro, cone, esfera, poliedro (que iremos definir no próximo capítulo) ou qualquer superfície fechada, simples (isto é, sem auto-interseção), mais a região delimitada por ela.
- Vale salientarmos que a idéia de sólido que acabamos de dar é um conceito primitivo, ou seja, sem definição, uma vez que não demos a definição de superfície fechada simples e nem tampouco a definição da região delimitada por ela. Enfim, temos somente uma idéia

- (Congruência de sólidos) Diremos que um sólido S é congruente a um sólido S_0 e escrevemos $S \equiv S_0$ se existe uma função bijetiva $f : S \to S_0$ tal que

$$d(A,B) \equiv d(f(A),f(B)),$$

para quaiquer que sejam os pontos distintos $A,B \in S$.

Axiomas da função volume

- Para todo sólido S está associado um numero real positivo V(S).
- Se S e P são sólidos congruentes, então

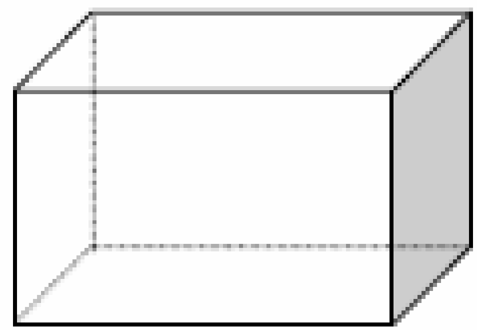
$$V(S)= V(P).$$

- Se S e P são sólidos que se cortam apenas em pontos da superfície de cada um, então:

$$V(SUP)=V(S)+ V(P).$$

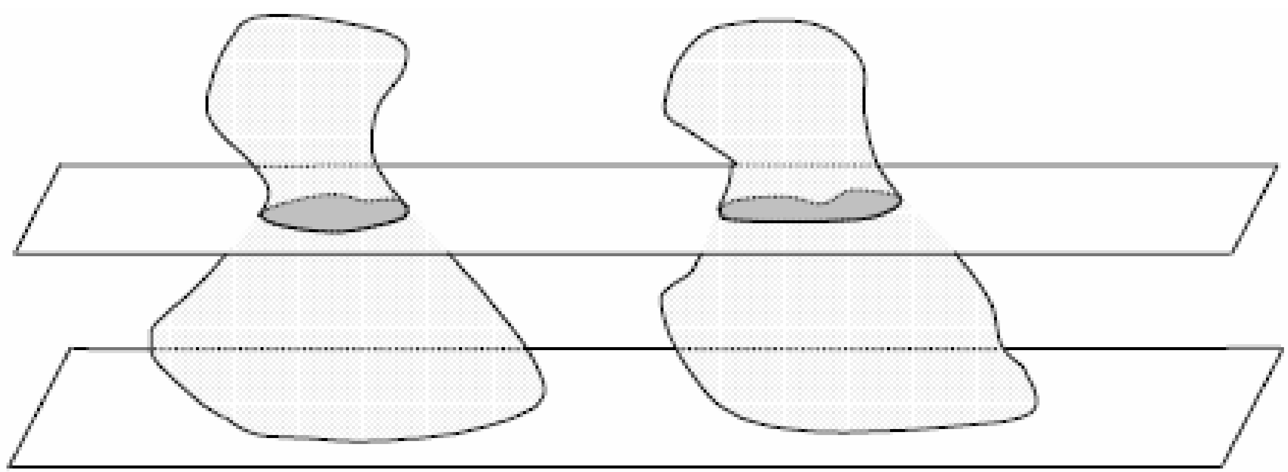
- O volume de um paralepípedo P de dimensões a, b e c é

$$V(P)=abc$$



PRINCÍPIO DE CAVALIERI

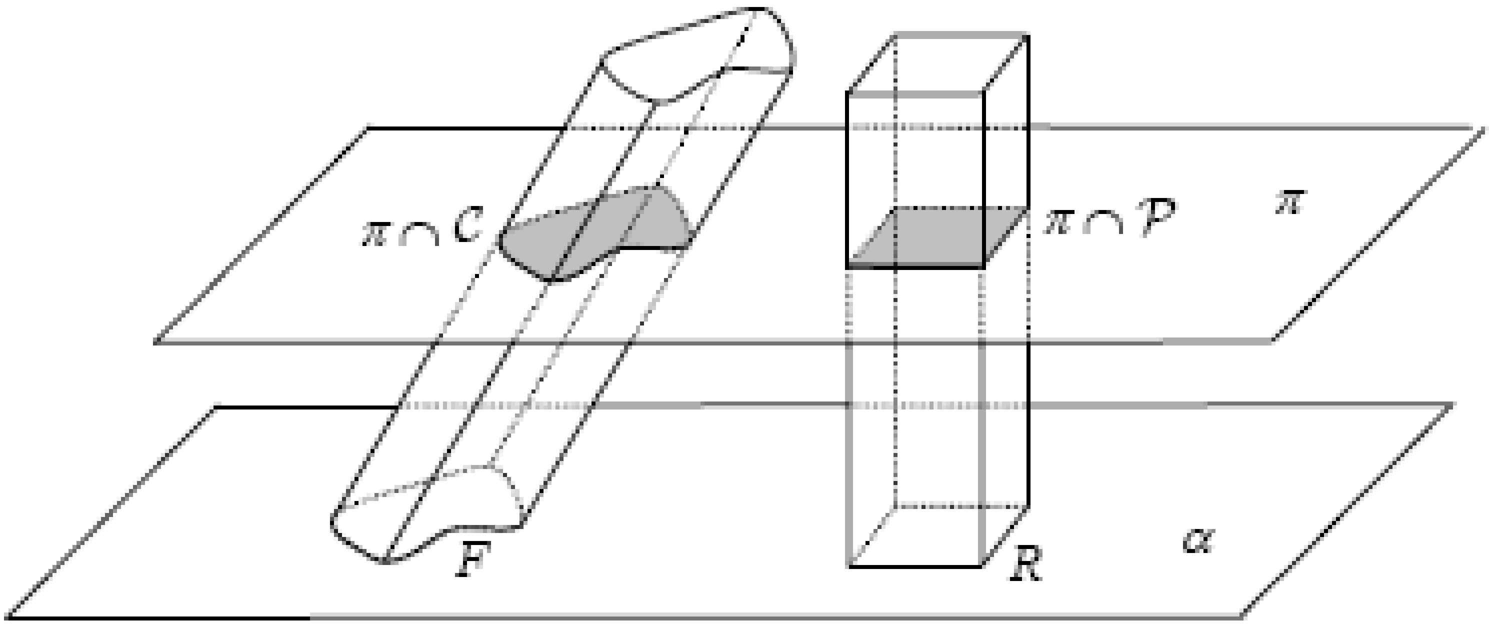
"Sejam S e S_0 sólidos. Se todo plano horizontal intercepta S e S_0 segundo figuras com mesma área, então S e S_0 têm mesmo volume."



Volume de um Cilindro

Proposição: O volume de um cilindro é igual ao produto da área da base pela altura.

Prova. Seja C um cilindro entre os planos α e β de base F e altura h, suponha que $F \subset \alpha$. Considere um paralelepípedo P, retangular, cuja base R está contida em α e tem a mesma área de F, cuja altura seja h e esteja no mesmo semi-espaço (determinado por α) em que se encontra C.

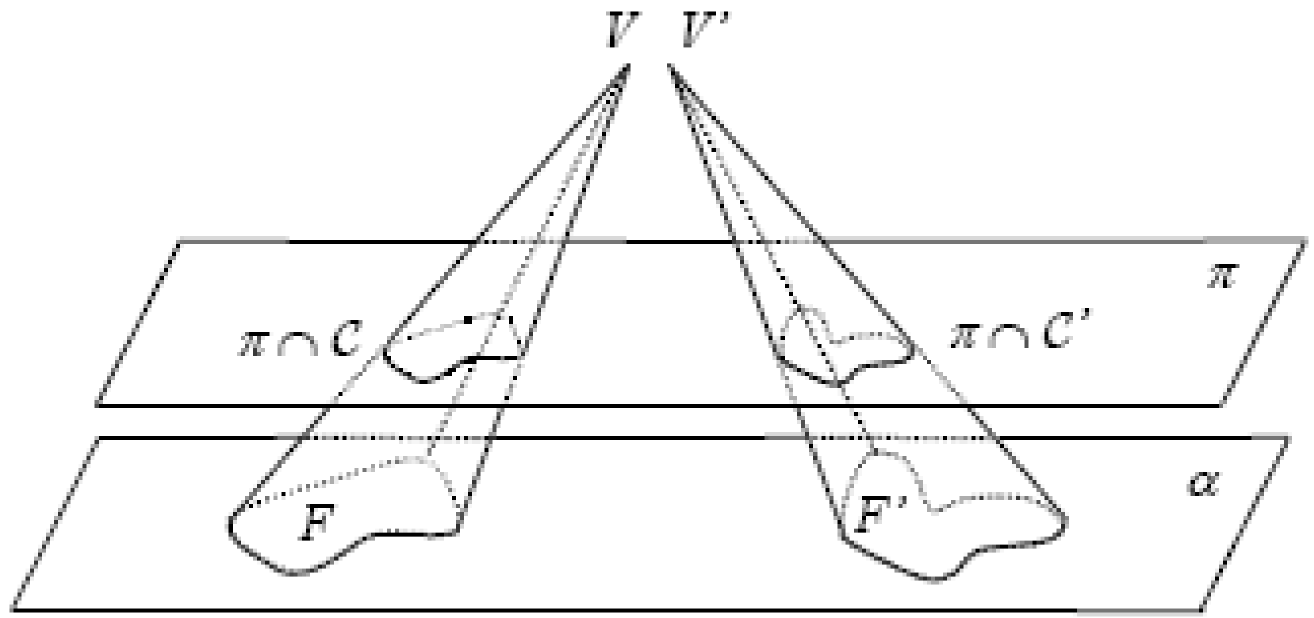

$\pi \cap \mathcal{C}$
$\pi \cap \mathcal{P}$
π
F
R
α

Considere um plano π paralelo a α e β, entre α e β. Pelo que provamos, $\pi \cap C \equiv F$ e $\pi \cap P \equiv R$. Como F e R têm mesma área, segue-se as seções $\pi \cap C$ e $\pi \cap P$ têm mesma área.

Pelo princípio de Cavalieri, o cilindro e o paralelepípedo têm mesmo volume. Como o volume de P é o produto da área de R por h, decorre que o volume de C é o produto da área de R por h e, como R e F têm mesma área, segue-se que o volume de C é o produto da área de F por h.

Volume de cones

Proposiçao: Dois cones têm mesmo volume se têm mesma altura e suas bases têm mesma área.



V
V'
π
π ∩ C
π ∩ C'
α
F
F'

- Prova. Coloquemos as bases dos dois cones num mesmo plano, digamos, α, e seus vértices num mesmo semi-espaço determinado por α. Sejam: C e C' os cones, F e F' as respectivas bases, V e V' os respectivos vértices e h a altura comum.

- Para demonstrar que C e C' têm o mesmo volume utilizaremos o princípio de Cavalieri. Seja π um plano paralelo a α, entre V (ou V') e α e $h' = d(V, \pi)$. Basta mostrarmos que $\pi \cap C$ e $\pi \cap C'$ têm mesma área.

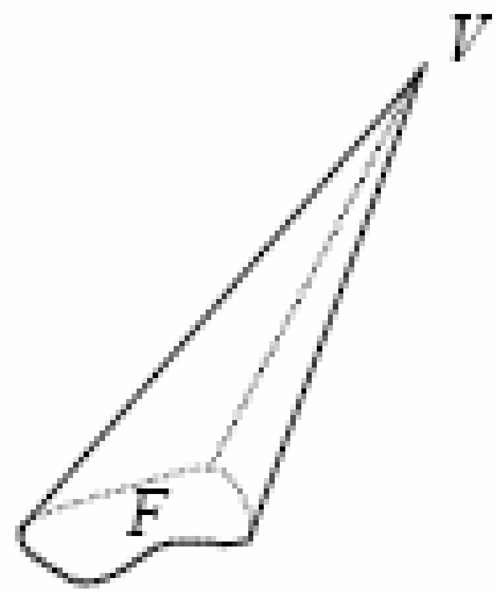
Temos que $F \sim \pi \cap C$ com razão de semelhança igual a h/h' e $F' \sim \pi \cap C'$ com razão de semelhança também igual a h/h' . Como a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança, segue-se que

$$A(F)/A(\pi \cap C) = (h/h')^2 = A(F')/A(\pi \cap C')$$

Já que $A(F) = A(F')$, decorre que

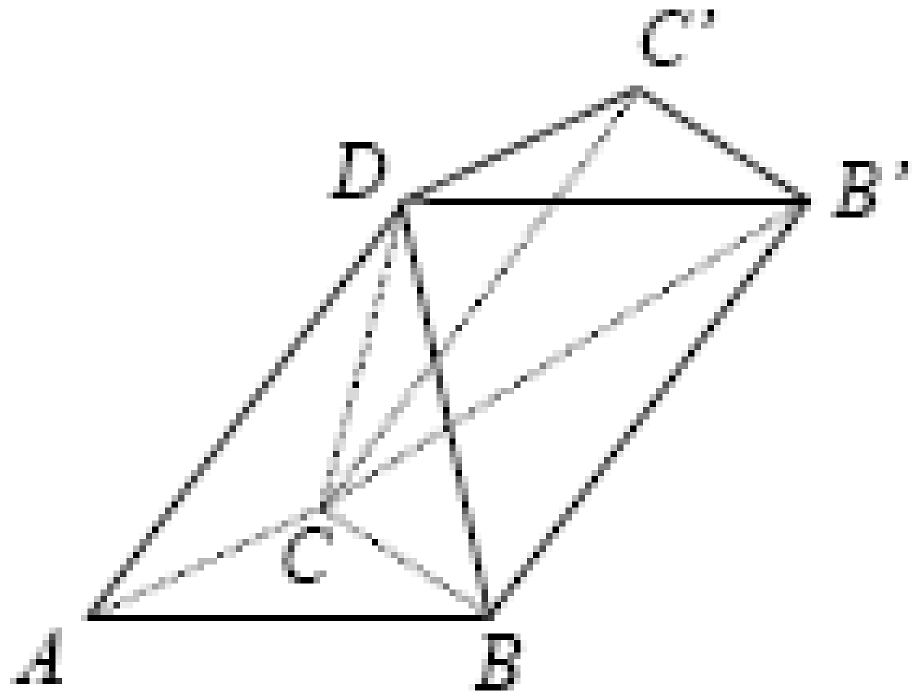
$$A(\pi \cap C) = A(\pi \cap C').$$

- Proposição: O volume de um cone é igual a um terço da área da base pela altura.



- Inicialmente, demonstraremos o resultado para o caso do cone ser um tetraedro.
- Consideremos então um tetraedro T de base um triângulo ABC, de vértice D e altura h.

- Sejam α o plano que contém ABC, β o plano paralelo a α passando por D e B’ e C’ os respectivos pontos de interseção das retas paralelas a l(A,D) passando por B e C com α.
- Considere o prisma P entre α e β cuja reta de inclinação é l(A,D) e cuja base em α é ΔABC. A base de P em β é ΔDB’C’.


C'
D
B'
C
A
B

- Observe que P pode ser decomposto como união dos seguintes três tetraedros: T , o tetraedro T’ de vértices em B, C, D e B’ e o tetraedro T” de vértices em B’, C’, D e C.

- Vamos mostrar que esses três tetraedros têm mesmo volume. Com efeito, tomando ΔABD como base de T, ΔB’DB como base de T’ e C como vértice comum a T e T’, então T e T’ têm bases congruentes e mesma altura, logo, têm mesmo volume.

- Pela mesma razão, T’ e T” têm mesmo volume se considerarmos $\Delta BB'C$ como base de T’, $\Delta C'CB'$ como base de T” e D como vértice comum a T’ e T”.

- Já que T , T’ e T” têm mesmo volume e P é decomposto como união destes tetraedros,segue-se que

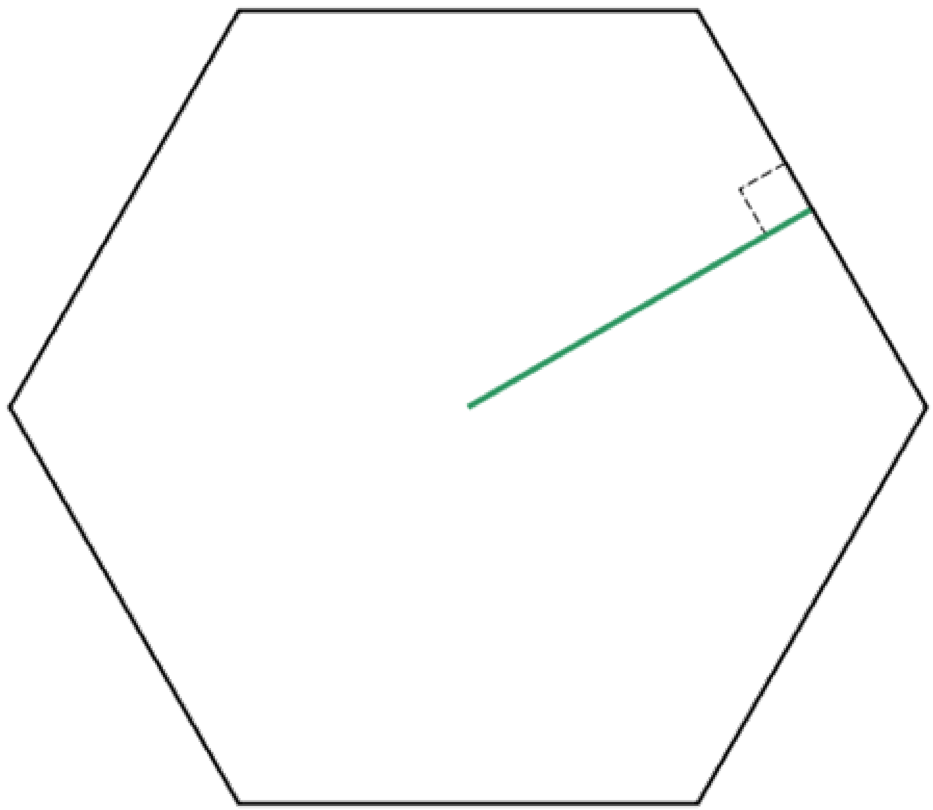
$$V(T) = (1/3)V(P) = (1/3)A(\Delta ABC) \cdot h.$$

Por conseguinte, o teorema vale para tetraedros.

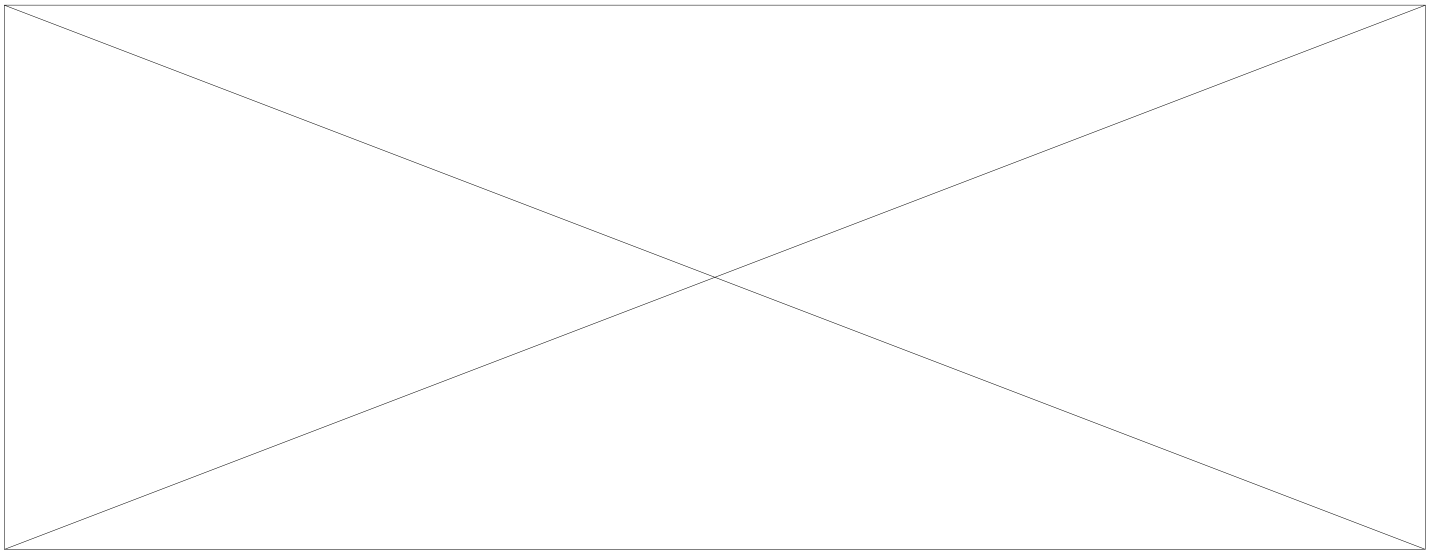
- Para demonstrarmos que o resultado é válido para um cone C qualquer é só considerarmos um tetraedro com mesma altura de C e cuja base tenha a mesma área da base de C. O resultado decorre do resultado anterior.

- COROLÁRIO 1: O volume de um cone circular é igual a 1 /3 $\pi r^2 h$, em que r é o raio da base e h é a altura do cone.
- COROLÁRIO 2: O volume de uma pirâmide, cuja base é um polígono regular, é igual a 1 /3pah, em que p e a são, respectivamente, o semi-perímetro e a medida do apótema da base e h é a altura da pirâmide.
- Prova. O resultado segue-se pelo fato da área de um polígono regular ser igual ao produto de seu semi-perímetro pelo seu apótema.

- **Apótema** (ou o *apotegma*) de um polígono regular é a designação dada ao segmento de reta que partindo do centro geométrico da figura é ***perpendicular*** a um dos seus lados. Dado que a distância mínima do centro a um dos lados é medida ao longo da apótema, esta designação é por vezes usada, embora incorretamente, para designar essa distância.

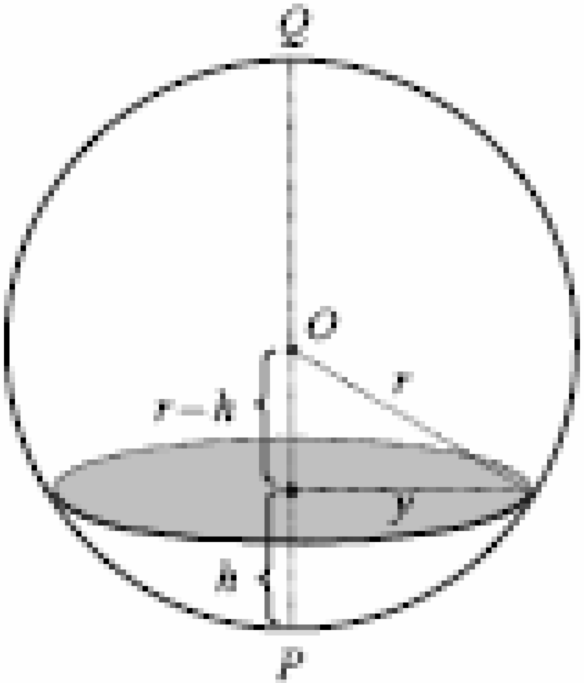


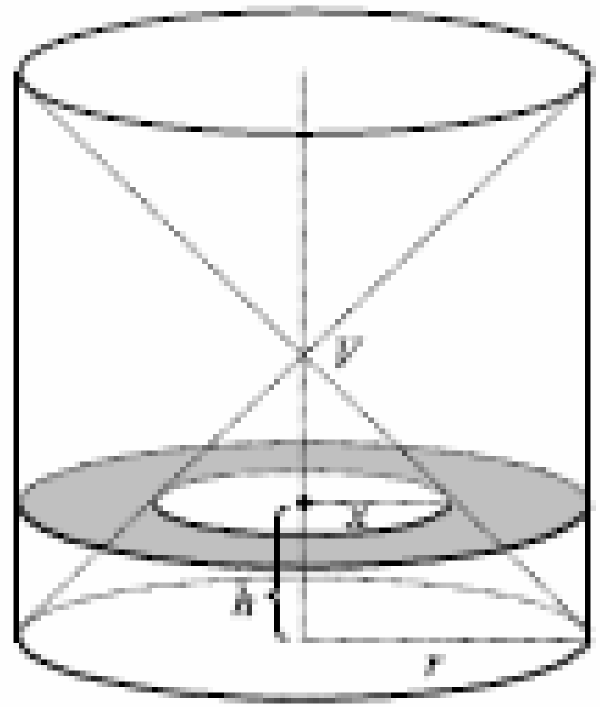
Proposição: O volume de uma esfera de raio r é igual a $4/3\ \pi r^3$.



- Prova. Sejam O o centro da esfera, t uma reta passando em O, e, P e Q pontos distintos em t tais que O é ponto médio de PQ e OP = r = OQ. Sejam α e β os planos perpendiculares a t passando, respectivamente, por P e Q. Assim, α e β são paralelos e são tangentes à esfera, respectivamente, em P e Q. Seja C um cilindro circular entre α e β tendo como reta de inclinação t (portanto, reto) cujos raios das bases são iguais a r.

- Seja V o ponto médio do segmento de reta que une os centros das bases de C. Considere os cones com o vértice comum V e cujas respectivas bases são as bases de C.


Q
O
r
r − h
y
h
P


y
x
h
r

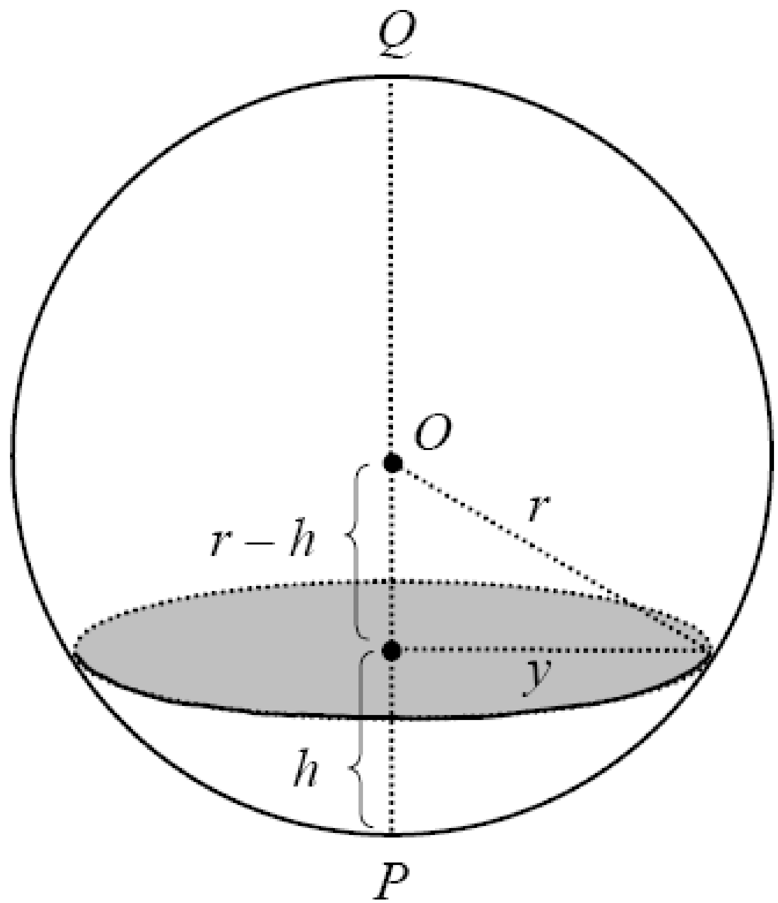
- Utilizaremos o princípio de Cavalieri para mostrar que o volume da esfera é igual ao volume do sólido S formado pelos pontos de C não interiores à reunião dos dois cones. Seja γ um plano qualquer paralelo a α e β, entre α e β. Mostraremos que o disco de interseção de γ com a esfera tem a mesma área de $\gamma \cap S$ (que é uma coroa circular). Seja h a distância entre α e γ.

Faremos a demonstração supondo $h < r$. O raciocínio que iremos empregar também se aplica ao caso de $r \leq h$, o qual omitiremos. Seja y o raio do disco de interseção de γ com a esfera. Usando o Teorema de Pitágoras, podemos concluir que

$$y^2 = 2rh - h^2,$$

por conseguinte, a área do disco é igual a

$$\pi\,(2rh - h^2)\,.$$

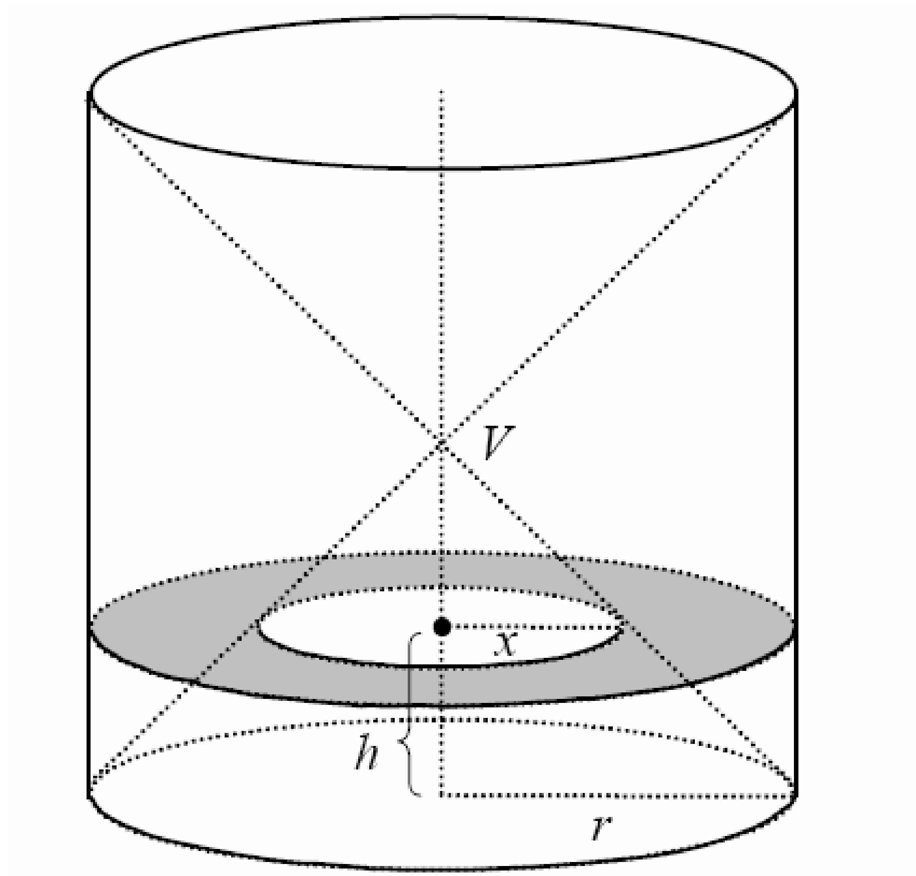


Q
O
r
r − h
y
h
P

Vamos agora calcular a área de $\gamma \cap S$. Seja x o raio do círculo menor da coroa. Usando semelhança, chegaremos à relação

$$x/r = r-h/r,$$

donde, $x = r - h$. Sendo r o raio do círculo maior da coroa, então sua área é igual a $\pi r^2 - \pi (r - h)^2 = \pi (2rh - h^2)$.


V
x
h
r

Logo, o disco de interseção de γ com a esfera tem a mesma área de $\gamma \cap S$. Assim, o volume da esfera é igual ao volume de S que, por sua vez, é igual a V(C) menos o volume dos dois cones, ou seja,

$$(\pi r^2)\cdot(2r) - 2 \cdot 1/3\, \pi r^2 \cdot r = 4/3\, \pi r^3.$$