Elementos de Lógica Matemática

Uma Breve Iniciação

Proposições

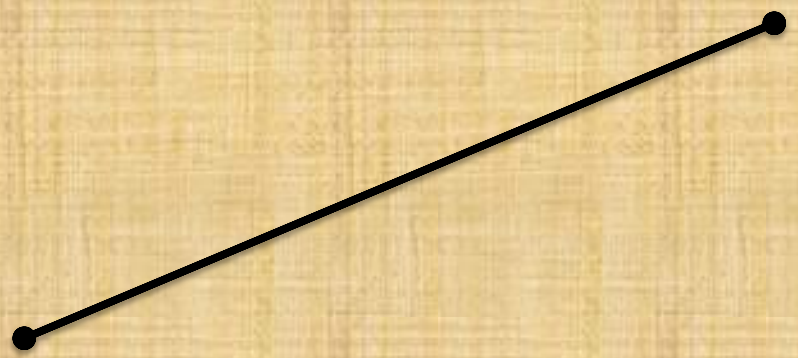
- Uma **proposição** é uma afirmação passível de assumir valor lógico *verdadeiro ou falso.*
- Exemplos de Proposições
  - 2 > 1 (V);
  - 5 = 1 (F).

Termos não definidos

- Como vimos, em geral a teoria terá termos não definidos para evitar definições cíclicas tipo as que foram dadas por Euclides para ponto e reta. Porém estes termos não estão totalmente livres . Os axiomas em geral nos dão propriedades que estes objetos devem satisfazer e que poderemos usar em nossas definições.

Um exemplo…

- Quando falamos que dois pontos determinam uma única reta voce pode pensar que ela tem a seguinte forma:



- Ou que que é o caminho mais curto entre dois pontos.

REGRAS LÓGICAS

REGRA LÓGICA 0:

Em uma prova ou demonstração não pode ser usada nenhuma proposição que não tenha sido provado anteriormente ou suposta verdeira (axioma)

TEOREMAS E PROVAS

- Uma teorema matemático é uma uma sentença condicional ou uma sentença da forma:

Se HIPÓTESE então CONCLUSÃO.

Hipótese $\rightarrow$Conclusão

- Se um teorema não está escrito na forma condicional, ele pode ser reescrito nesta forma.

EXEMPLO

- Teorema: Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.

- Podemos reescrevê-lo como
- Teorema Se um triângulo é isósceles então os seus ângulos da base são congruentes.

REGRA LÓGICA 1

- As seis justificativas abaixo são justificativas aceitáveis em uma prova:

1. Por hipótese ….
2. Pelo axioma …
3. Pelo Teorema …. (provado anteriormente)
4. Por definição…
5. Pelo passo … (um passo anterior do argumento)
6. Pela regra …. de lógica

Conectivos Lógicos

- Proposições podem ser conectadas através dos seguintes *conectivos:*
- • "~" ou (negação);
- • "$\wedge$" (conectivo "e");
- • "$\vee$" (conectivo "ou");
- • "$\rightarrow$" (conectivo "implica");
- • "$\leftrightarrow$" (conectivo "se, e somente se").

PROVA POR ABSURDO

- REGRA LÓGICA 2:
- Para provar uma sentença da forma $H \rightarrow C$, suponha a negativa de C (Hipótese por contradição ou absurdo) e deduza uma sentença absurda usando a hipótese H.

Exemplo

- Teorema: Se duas retas distintas *m* e *n* não são paralelas então elas possuem um único ponto em comum.
- Prova:
- Como *m* e *n* não são paralelas, $m \cap n \neq \emptyset$.
- Já que queremos provar que esta interseção é um único ponto, vamos supor por contradição que *m* e *n* possuem os pontos A e B em comum, com $A \neq B$.

- Concluimos então que pelos pontos A e B passam duas retas distintas.
- Pelo Primeiro Axioma de Euclides, A e B determimam uma única reta.
- Obetemos portanto uma contradição e portanto as retas se cortam em um único ponto.

NEGAÇÃO

- Se S é uma afirmação, iremos denotar por ~S sua negação.
- Se S é a sentença “x é par”, sua negativa ~S é “x não é par” ou “x é impar”

REGRAS PARA NEGAÇÃO

- REGRA LÓGICA 3: ~(~S) tem o mesmo valor lógico que S
- REGRA LÓGICA 4: ~[H→C] tem o mesmo valor lógico que $H \wedge \sim C$
- REGRA LÓGICA 5: $\sim[S_1 \wedge S_2]$ tem o mesmo valor lógico que $[\sim S_1 \vee \sim S_2]$

Conectivos Lógicos

- “• “P $\leftrightarrow$Q” é a mesma coisa que “P $\rightarrow$ Q e Q $\rightarrow$ P”, ou seja, é verdadeira se ambas forem verdadeiras ou ambas forem falsas.

Variáveis Livres

- Seja P uma expressão na qual ocorre uma ou mais variáveis x, y, z, ... Dizemos que uma dada ocorrência de uma variável x na expressão P é *livre se x não está no escopo de algum* quantificador $\forall$ (*quantificador universal) ou* $\exists$ *(quantificador existencial).*

Variáveis Livres

- Exemplos:
- • $x > 0$ (x é variável livre);
- • $\exists y(y > x)$ (x é livre, y é não-livre);
- • $\forall x(\exists y(y > x))$(nenhuma das variáveis é
- livre);
- • $\forall \varepsilon ((\exists \delta(0 < |x - a| < \delta\ !\ |x^2 - a^2| < \varepsilon)$ (x e a são livres, ε e δ são não-livres).

NEGAÇÂO COM QUANTIFICADORES

- REGRA LÓGICA 6: ~($\forall$x, S(x)) tem o mesmo valor lógico que $\exists$x, ~S(x)

- REGRA LÓGICA 7: ~($\exists$x, S(x)) tem o mesmo valor lógico que $\forall$x, ~S(x)

IMPLICAÇÃO

- REGRA LÓGICA 8: Se $P \rightarrow Q$ e P são passos de uma prova, então Q é uma passo justificável

- REGRA LÓGICA 9:
  - $[[P \rightarrow Q] \wedge [Q \rightarrow R]] \rightarrow [P \rightarrow R]$
  - $[P \wedge Q] \rightarrow P$; $[P \wedge Q] \rightarrow Q$
  - $[\sim Q \rightarrow \sim P] \leftrightarrow [P \rightarrow Q]$

Lei do Terceiro Excluido

- REGRA LÓGICA 10:
- Para toda sentença P, P ou ~P é um passo válido em uma prova.

Considere a seguinte prova:

Prova: Dado um triangulo $\triangle$ ABC. Construa a bissetriz do ângulo $\angle$A e a mediatriz perpendicular do lado BC oposto ao ângulo A. Considere os vários casos:

Caso I. A bissetriz do ângulo $\angle$A e a mediatriz do segmento BC são paralelas ou idênticas. Em ambos os casos, a bissetriz de $\angle$A é perpendicular a BC e, portanto, por definição, é uma altura do triângulo $\triangle$ ABC. Portanto, o triângulo é isósceles.

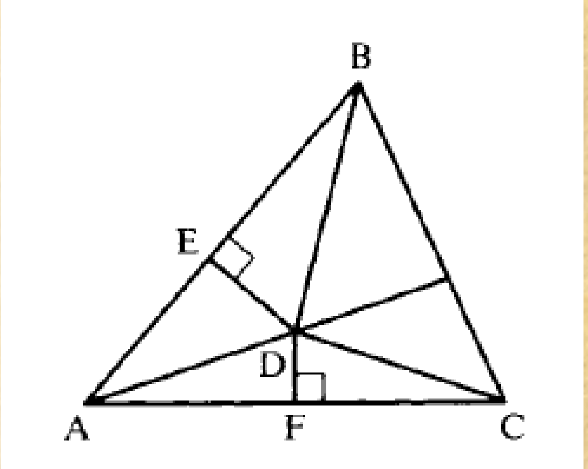
A conclusão decorre do Teorema de Euclides: se uma bissetriz e altura em relação ao mesmo vértice de um triângulo coincidem, o triângulo é isósceles.

Suponha agora que a bissetriz de $\angle A$ e a mediatriz do lado oposto não são paralelas e não coincidem. Logo, elas se cruzam em exatamente um ponto, D, e há três casos a considerar:

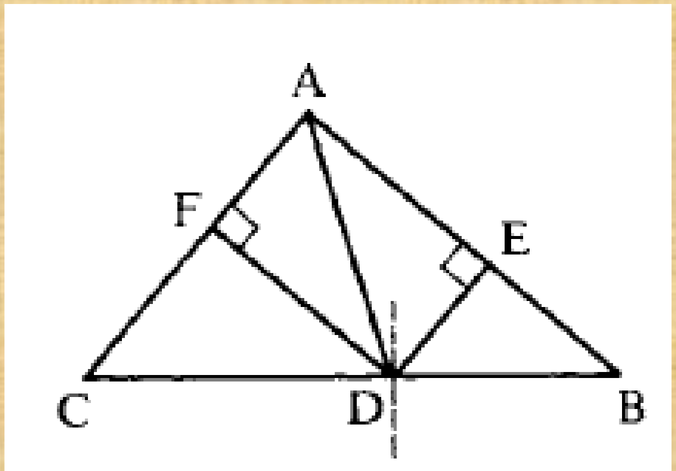
Caso 2. O ponto D está dentro do triângulo.

Caso 3. O ponto D está em triângulo.

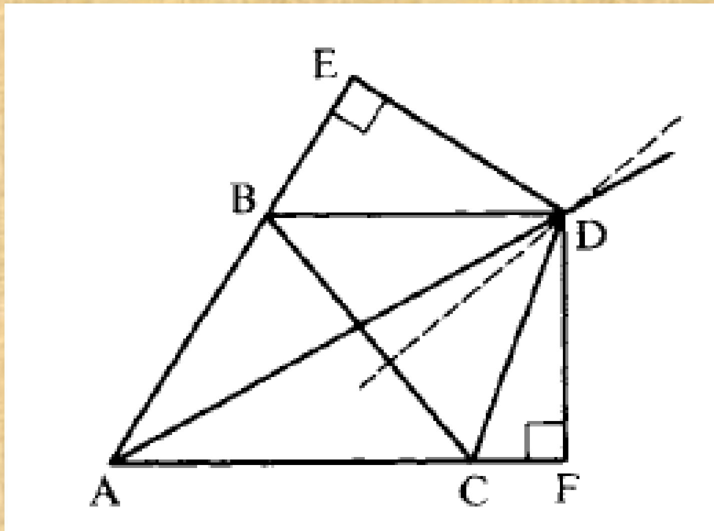
Caso 4. O ponto D está fora do triângulo.



Caso 2



Caso 3



Caso 4

Para cada caso de construir DE perpendicular a AB e DF perpendicular a AC, e para os casos 2 e 4, ligar o ponto D ao ponto C. Em cada caso, temos que o seguite argumento se verifica:

DE $\cong$ DF porque todos os pontos em uma bissetriz são eqüidistantes dos lados do ângulo;

DA$\cong$AD e os ângulos $\angle$ DEA e $\angle$DFA são ângulos retos. Logo os triângulos $\triangle$ ADE e $\triangle$ ADF são congruentes (pelo caso hipotenusa-cateto de congruencia de triângulos retângulos).

Logo AE$\cong$AF .

Agora, $DB \cong DC$ porque todos pontos sobre mediatriz perpendicular de um segmento são eqüidistantes das extremidades do segmento.

Além disso, $DE \cong DF$, $\angle OEB$ e $\angle OFE$ são ângulos retos. Assim, $\triangle DEB$ é congruente a $\triangle DFC$ pelo caso hipotenusa-cateto de congruência de triângulos. Portanto, $FC \cong BE$. Segue-se que $AB \cong AC$; nos casos 2 e 3 por adição e no caso de 4 por subtração. O triângulo é, por conseguinte isósceles.

Cqd.

Provamos então:

Teorema: Todos os triângulos são isósceles.

ONDE ESTÁ O ERRO?