Universidade Federal do Rio de Janeiro
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Métodos Matemáticos

Primeira Lista de Exercícios - Geometria Diferencial 2010/02

1. Calcular o vetor tangente unitário, a normal principal e a curvatura das seguintes curvas, dadas por:
   (a) $\alpha(t) = (a\cos t \cos t, a \cos t \text{sen } t)$.
   (b) $\alpha(t) = (at\cos t, at\text{sen } t)$.
   (c) $\alpha(t) = (a(1+\cos t)\cos t, a(1+\cos t)\text{sen } t)$.
   (d) $\alpha(s) = (\sqrt{1+s^2}, \ln(s+\sqrt{1+s^2}))$.
   (e) $\alpha(t) = (t, \cosh t)$.
   (f) $\alpha(t) = (\cos^3 t, \text{sen }^3 t), \quad t \in (0, 2\pi)$.

   (Aqui $a \in \mathbb{R}$ constante).

2. Considere uma curva cujo traço é o gráfico de uma função definida por $y = f(x)$, onde $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $\mathcal{C}^2$. Mostre que a curvatura dessa curva é dada por
$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{(1+(f'(x))^2)^{3/2}}.$$

3. Determinar a curvatura do gráfico da função f, definida por
$$f(x) = \log x, \quad \forall x \in (0,\infty).$$

4. Mostre que a curvatura κ do gráfico da função f, dada por
$$f(x) = a\cosh\frac{x}{a}, \quad a \neq 0 \quad (\textit{catenaria}),$$
é igual a
$$\kappa(x) = \frac{a}{(f(x))^2},$$

5. Determinar a curvatura do gráfico da função f, definida por
$$f(x) = \text{sen } ax^2,$$
na origem de $\mathbb{R}^2$.

6. Seja $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ una curva, dada por
$$\alpha(t) = ((1-2\text{sen } t)\cos t, (1-\text{sen } t)\text{sen } t).$$
   (a) Mostre que α é uma curva regular fechada, de classe $\mathcal{C}^1$.
   (b) A curva α é simples?
   (c) Esboce o traço de α.

7. Seja $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ uma curva, definida por
$$\alpha(t) = ((1+\cos t)\cos t, (1+\cos t)\text{sen } t).$$

(a) Determinar as singularidades de α.

(b) A curva α é fechada?

(c) Calcular a curvatura de α.

(d) Esboce o traço de α, que é denominado *cardióide*.

8. A *hipocicloide* é a trajetória descrita pelo movimento de um ponto fixo P pertencente ao círculo de raio r, que gira no interior de um círculo fixo de raio $R > r$. Se $R = 4r$, então a hipocicloide recebe o nome particular de *astróide*.

   (a) Demonstre que a curva α, dada por

   $$\alpha(t) = \left((R-r)\cos t + r\cos\frac{(R-r)}{r}t, (R-r)\text{sen}\, t - r\text{sen}\,\frac{(R-r)}{r}t \right),$$

   é uma parametrização da hipociclóide.

   (b) Esboce o traço de α com $R = 5$ e $r = 2$.

   (c) Esboce o traço de α com $R = 4$ e $r = 1$.

9. A *epiciclóide* é a trajetória descrita pelo movimento de um ponto fixo P, pertencente ao círculo de raio r, que gira sobre a parte externa de um círculo de raio $R > r$. Se $R = r$, então la epiciclóide recebe o nome particular de cardióide.

   (a) Mostre que a curva α, definida por

   $$\alpha(t) = \left((R+r)\cos t - r\cos\frac{(R+r)}{r}t, (R+r)\text{sen}\, t - r\text{sen}\,\frac{(R+r)}{r}t \right),$$

   é uma parametrização da epiciclóide.

   (b) Esboce o traço de α com $R = 3$ e $r = 1$.

   (c) Esboce o traço de α com $R = r = 1$.

10. O círculo osculador de uma curva α em um ponto $p \in \mathcal{C}(\alpha)$ é o círculo S^1 que é tangente a curva α em p e tem raio $\dfrac{1}{\kappa(p)}$. Provar que se $\kappa'(p) \neq 0$, então o círculo osculador em p intercepta a curva α.

11. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura $\kappa \neq 0$. A aplicação α_e que a cada $t \in I$ associa o ponto

    $$\alpha_e(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t),$$

    onde N é o campo normal unitário de α, é uma curva diferenciável em $\mathbb{R}^2$, e é chamada *evoluta* da curva α.

    (a) Provar que a evoluta de uma curva parametrizada α é regular se e somente se, $\kappa \neq 0$.

    (b) Mostre que os pontos singulares da evoluta de uma curva parametrizada α são aqueles em que a curva α possui um ponto crítico ($t \in I$ é um ponto crítico de κ se $\kappa'(t) = 0$).

12. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Seja $L_\alpha : I \to \mathbb{R}$ o comprimento de arco de α a partir de t_0,
$$L_\alpha(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(l)\| dl.$$
Definimos a *involuta* da curva α pela aplicação $\alpha_i : I \to \mathbb{R}^2$, dada por
$$\alpha_i(t) = \alpha(t) + (c - L_\alpha(t))T(t),$$
onde T é o campo tangente de α e c é uma constante real positiva.
   (a) Mostre que a involuta de α é uma curva regular se $c \neq L_\alpha(t)$ y $\kappa(t) \neq 0$.
   (b) Provar que todas as retas normais a involuta de α são retas tangentes da curva α.
   (c) Demonstre que uma curva regular α é a evoluta de qualquer uma de suas involutas.

13. Seja α uma curva definida por
$$\alpha(t) = (3\text{sen } t - 2\text{sen }^3 t, 3\cos t - 2\cos^3 t).$$
Prove que a evoluta de α é dada pela equação
$$x^{2/3} + y^{2/3} = 2^{4/3}.$$

14. Determinar a evoluta da curva, definida por
$$\alpha(t) = (t^2, t^3).$$

15. A curva $x^3 + xy^2 = y^2$ pode ser parametrizada por
$$\alpha(t) = \left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{t^3}{1+t^2}\right).$$
Mostre que a equação de sua evoluta é
$$512x + 288y^2 + 27y^4 = 0.$$

16. Determinar a curvatura da curva, definida por
$$\alpha(t) = \left(\int_0^t \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du, \int_0^t \frac{\text{sen } u}{\sqrt{u}} du\right),$$
em particular esboce o traço da curva α.

17. Calcular as curvaturas das curvas dadas em coordenadas polares (r, θ) a seguir:
   (a) $r = acos\theta$ (círculo).
   (b) $r = a\theta$ (espiral de Arquímides).
   (c) $r = a(1 + \cos\theta)$ (cardioide).

Finalmente em cada ítem, esboce o traço das curvas.

18. Seja α a curva dada por
$$\alpha(t) = (t^m, t^n),$$
onde m e n são inteiros positivos e $t > 0$. Mostre que a curva α é regular. Seja $p = \alpha(t)$, q e r os pontos onde a recta tangente a α em p intercepta os eixos Ox y Oy, respectivamente. Prove que $\dfrac{|p-q|}{|p-r|}$ é constante e descubra seu valor.

19. Seja α uma curva que tem a seguinte propriedade: *todas suas retas normais são paralelas.* Mostre que seu traço está contido em uma reta.

20. Seja α uma curva com a seguinte propriedade: *todas suas retas normais passam por un ponto fixo* $C \in \mathbb{R}^2$. Mostre que o traço de α está contido em um círculo de centro C.

21. Encontre as retas tangentes a curva dada por
$$\alpha(t) = (t, t^4 - t + 3),$$
que passam pela origem.

22. Seja P o ponto onde a reta tangente a curva definida por
$$\alpha(t) = (t, t^3),$$
intercepta o eixo Ox e seja $M = (t, 0)$. Mostre que $OP = 2PM$, onde O é a origem. Generalize este resultado para a curva, dada por $\alpha(t) = (t, t^n)$.

23. Dada a hélice
$$\alpha(t) = (a\cos t, a\text{sen } t, bt).$$
Calcular $\alpha'(t)$, $\|\alpha'(t)\|$, e uma reparametrização pelo comprimento de arco.

24. Para a curva α definida por
$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t(1,1,1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\text{sen } t(1,0,-1), \qquad t \in \mathbb{R}.$$
Calcular $\alpha'(t)$, $\|\alpha'(t)\|$, e uma reparametrização pelo comprimento de arco.

25. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una função diferenciável. Então a curva $\alpha(t) = (t, f(t))$ parametriza o gráfico de f. Provar que seu comprimento de arco é dado pela fórmula:
$$L_\alpha = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)}dt.$$

26. Calcular a curvatura das seguintes curvas parametrizadas pelo comprimento de arco:

    (a) $\alpha(s) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos s, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos s, \text{sen } s\right).$

    (b) $\alpha(s) = \left(\dfrac{1}{3}(1+s)^{3/2}, \dfrac{1}{3}(1-s)^{3/2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}s)\right)$, $-1 < s < 1$.

27. Calcular (T, N, B, κ, τ) das seguintes curvas:

    (a) $\alpha(s) = \left(\dfrac{1}{3}(1+s)^{3/2}, \dfrac{1}{3}(1-s)^{3/2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}s\right), \quad 1 < s < 1.$

(b) $\alpha(t) = \left(\frac{1}{2}e^t(\text{sen } t + \cos t), \frac{1}{2}e^t(\text{sen } t - \cos t), e^t\right)$.

(c) $\alpha(t) = (\sqrt{1+t^2}, t, \ln(t + \sqrt{1+t^2}))$.

(d) $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \text{sen } t, e^t)$.

(e) $\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$.

(f) $\alpha(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}, t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2})\right)$.

(g) $\alpha(t) = (t - \text{sen } t \cos t, \text{sen } 2t, \cos t)$.

28. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco con curvatura $\kappa \neq 0$. A reta normal a α em $\alpha(s)$ é a reta passando por $\alpha(s)$ com direção o vector normal principal $N(s)$. Suponha que todas as retas normais a α passam por um ponto fixo. O que se dpode dizer sobre a curva?

29. Se todos os planos normais de uma curva α passam por um ponto fixo, prove que a curva está sobre una esfera.

30. Se todos os planos osculadores de uma curva passam por un ponto particular prove que a curva é plana.

31. Se a curvatura κ e a torção τ de uma curva α são constantes e não se anulam, prove que la curva é una hélice circular.

32. Demonstre que a torção τ de uma curva α verifica a seguinte igualdade

$$\tau = \frac{\alpha' \cdot (\alpha'' \times \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}.$$

33. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada regular com $\kappa(s) \neq 0,\ s \in I$. De todos os planos que contem a reta tangente a curva α em $\alpha(s)$, o plano osculador é o único plano com a seguinte propriedade: Para qualquer vizinhança $J \subset I$ de s, existem pontos de $\alpha(J)$ de ambos lados do plano osculador.

34. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada regular com $\kappa \neq 0$. Provar que a curva plana $\pi \circ \alpha$, onde π é a projeção ortogonal sobre o plano osculador em t, possui a mesma curvatura que α em t.