Geometria Euclideana Plana

A partir de agora, iremos iniciar nosso estudo axiomático da Geometria Euclidiana Plana. Vimos que os postulados de Euclides não são suficientes para demonstrar todos os resultados da geometria plana. De fato, vimos que nos Elementos de Euclides existem lacunas que não são possíveis preenchê-las somente com o conteúdo dos Elementos.

O que iremos fazer neste curso é axiomatizar a geometria de tal forma que não deixemos lacunas. Iremos usar um conjunto de axiomas que serão suficientes para demonstrar todos os resultados conhecidos desde o ensino fundamental.

Presupostos iniciais

Não podemos definir todos os termos que iremos usar. De fato, para definir um termo devemos usar um outro termo, e para definir esses termos devemos usar outros termos, e assim por diante. Se não fosse permitido deixar alguns termos indefinidos, estaríamos envolvidos em um processo infinito.

Euclides definiu linha como aquilo que tem comprimento sem largura e ponto como aquilo que não tem parte. Duas definições não muito úteis. Para entendê-las é necessário ter em mente uma linha e um ponto. Consideraremos alguns termos, chamados de primitivos ou elementares, sem precisar defini-los. São eles:

1. ponto;
2. reta;
3. pertencer a (dois pontos pertencem a uma única reta);
4. está entre (o ponto C está entre A e B);

O principal objeto de estudo da Geometria Euclidiana Plana é o plano.

O plano é constituído de pontos e retas.

Axiomas de Incidência

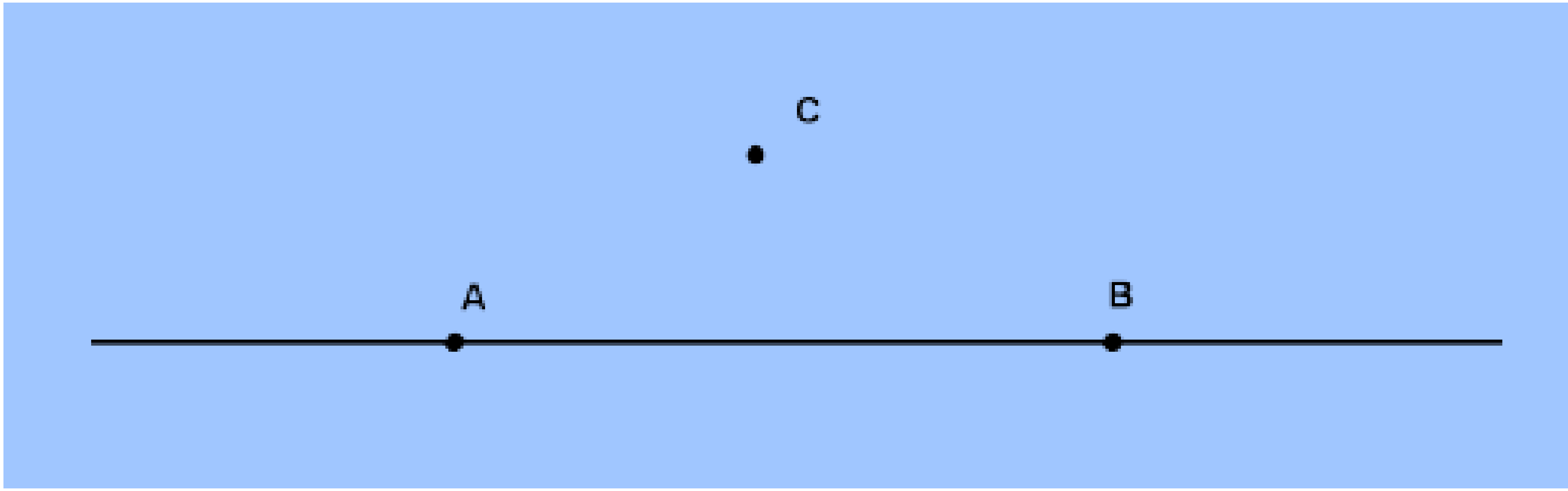
Pontos e retas do plano satisfazem a cinco grupos de axiomas. O primeiro grupo é constituído pelos axiomas de incidência.

Axioma de Incidência 1: Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

Axioma de Incidência 2: Em toda reta existem pelo menos dois pontos distintos.

Axioma de Incidência 3: Existem três pontos distintos com a propriedade que nenhuma reta passa pelos três pontos.


A
B


C
A
B

Definição: Dizemos que um conjunto de pontos A é colinear (ou que seus pontos são colineares) se existe uma reta r tal que $A \subset r$.

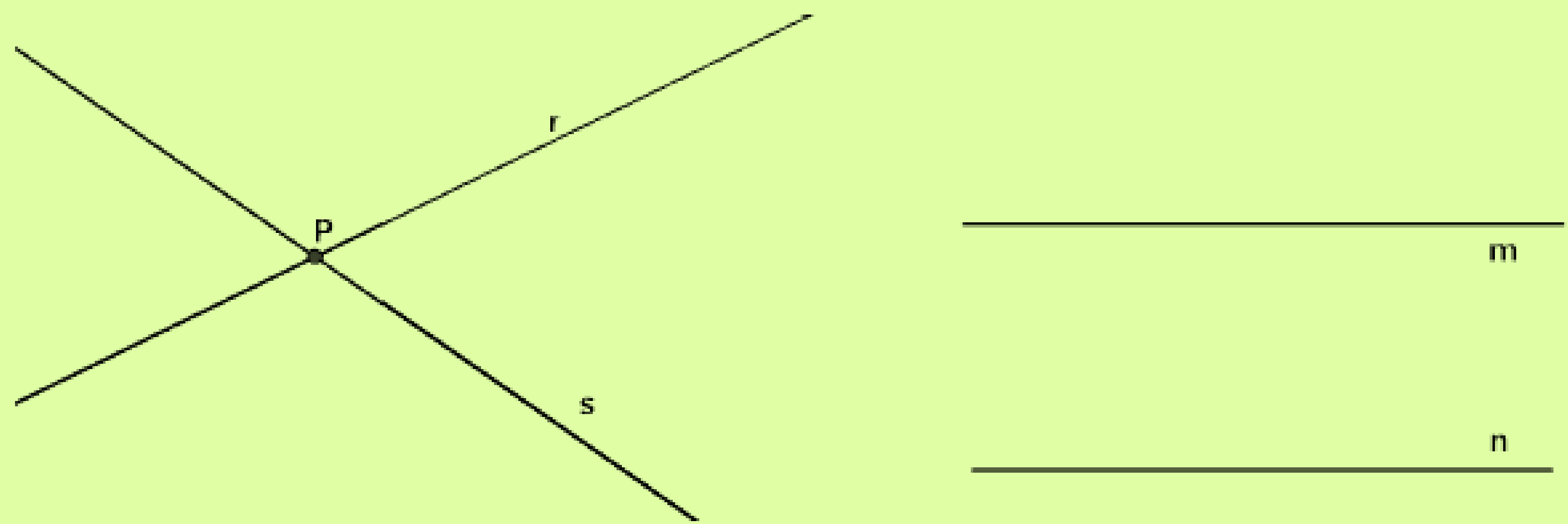
Com esta definição podemos reescrever o axioma de incidência 3 da seguinte forma:

Axioma de incidência 3: Existem pelo menos 3 pontos não colineares.

Observação: Destes três axiomas deduzimos alguns fatos simples, porém importantes:

- Toda reta possui pelo menos dois pontos.
- Não existe uma reta contendo todos os pontos.
- Existem pelo menos três pontos no plano.

Definição: Duas retas intersectam-se quando elas possuem um ponto em comum. Se elas não possuem nenhum ponto em comum, elas são ditas paralelas.



r e s se intersectam no ponto P e m e n são paralelas.

Proposição . Duas retas distintas ou não intersectam-se ou intersectam-se em um único ponto.

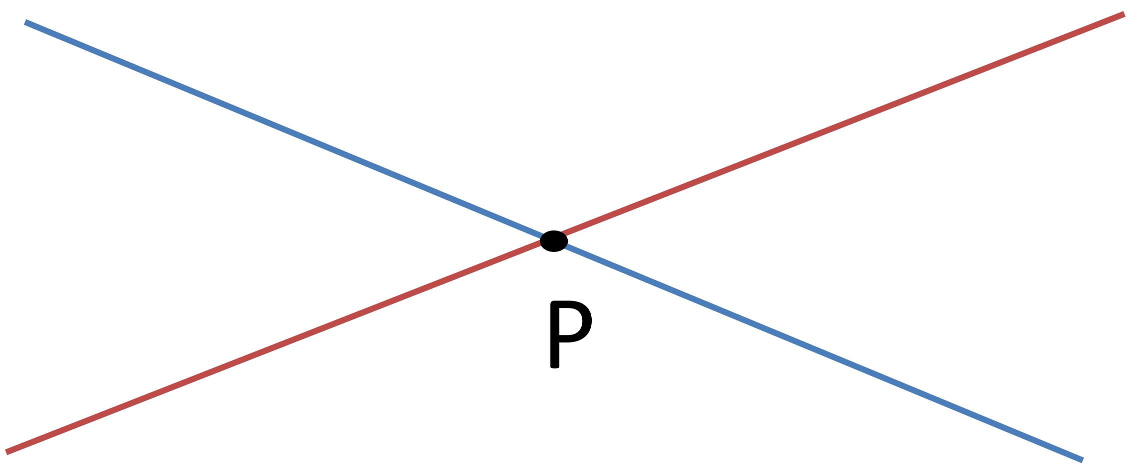
Demonstração: Sejam m e n duas retas distintas. Se m e n possuem pelo menos dois pontos distintos em comum então, pelo Axioma de Incidência 1, m e n coincidem, que é uma contradição com o fato que m e n são retas distintas.

Logo, m e n ou possuem um ponto em comum ou nenhum.

$\square$

Portanto a Proposição anterior diz que se duas retas distintas não são paralelas, então elas têm um ponto em comum.

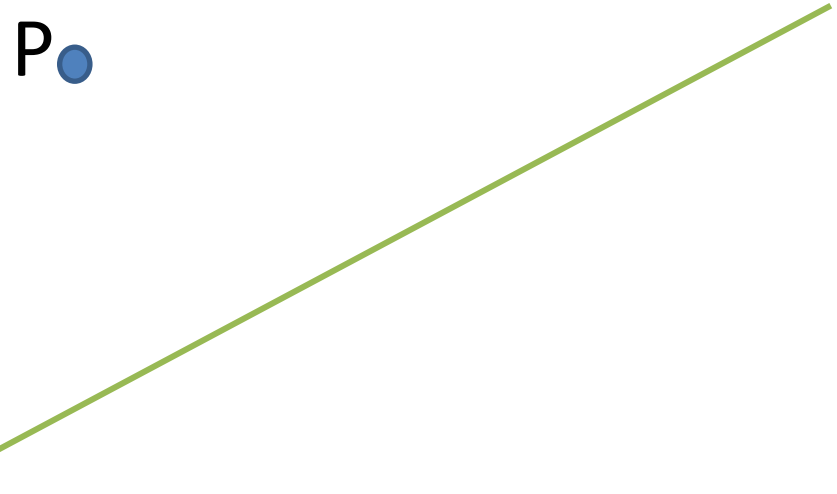
Proposição . Para todo ponto P; existem pelo menos duas retas distintas passando por P:



Demonstração: Pelo Axioma de Incidência 3, existe um ponto Q distinto de P. Pelo Axioma de Incidência 1 existe uma única reta l que passa por P e Q. Pelo Axioma de Incidência 3 existe um ponto R que não pertence a l. Novamente pelo Axioma de Incidência 1, existe uma reta r distinta de l que contém os pontos P e R.

$\square$

Proposição. Para todo ponto P existe pelo menos uma reta l que não passa por P.



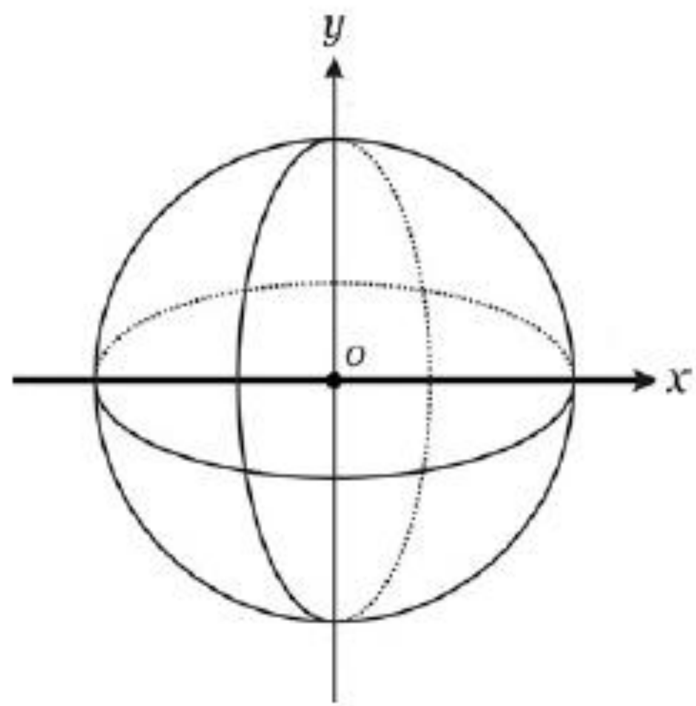
Demonstração. Pela Proposição anterior, existem duas retas distintas l e m que passam por P. Pelo Axioma de Incidência 2, em l existe um ponto $Q \neq P$ e em m existe um ponto $R \neq P$. Pelo Axioma de Incidencia 1, existe uma reta passando por Q e R. Afirmamos que P não pertence a t. De fato, suponha por absurdo que P está em t, então t possui os pontos P e Q e portanto t=l. De modo análogo, se como P e Q estão em t, t=m. Concluimos portanto que l=m, o que é uma contradição. Logo $P \notin t$.

Modelos para a geometria de incidência

Um plano de incidência é um par $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ onde $\mathcal{P}$ é um conjunto de pontos e $\mathcal{R}$ é uma coleção de subconjuntos de $\mathcal{P}$, chamados de retas, satisfazendo os três axiomas de incidência.

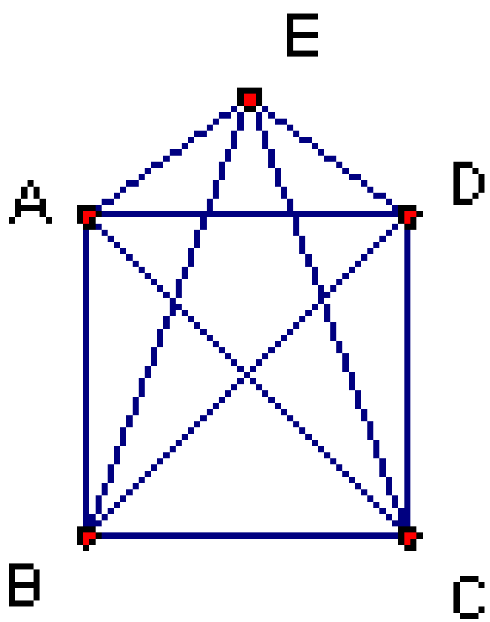
Exemplo 1.1. Sejam $\mathcal{P} = \{A, B, C\}$ e $\mathcal{R} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\}$. O par $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ é plano de incidência, já que satisfaz os três axiomas de incidência (Verifique!). Observe que dois subconjuntos quaisquer de $\mathcal{R}$ têm interseção vazia. Portanto, não existem retas paralelas.

Exemplo 1.2. Sejam $\mathcal{P} = \mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e $\mathcal{R}$ = conjunto de todos os grandes círculos em $\mathbb{S}^2$. Não é plano de incidência. Já que a interseção de dois grandes círculos em $\mathbb{S}^2$ são dois pontos.



Esfera unitária no espaço euclidiano.

Exemplo 1.3. Sejam $\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E\}$ e $\mathcal{R} = \{$todos os subconjuntos de $\mathcal{P}$ com dois elementos$\}$. É plano de incidência (Verifique!). Dada uma reta l e um ponto fora dela, existem pelo menos duas retas paralelas a l.



Exemplo 1.4. Sejam $\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}$ e $\mathcal{R} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}$. É plano de incidência (Verifique!). Dada uma reta l e um ponto P fora dela, existe uma única reta r paralela a l passando por P.