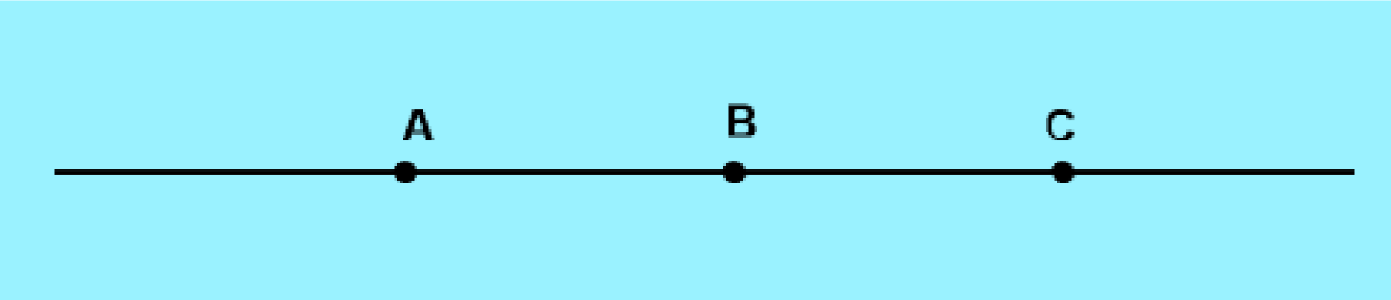
Axiomas de ordem

Dissemos anteriormente que a noção de "está entre" é uma noção primitiva. Nesta seção iremos apresentar o segundo grupo de axiomas que rege as leis para esta noção, os axiomas de ordem.

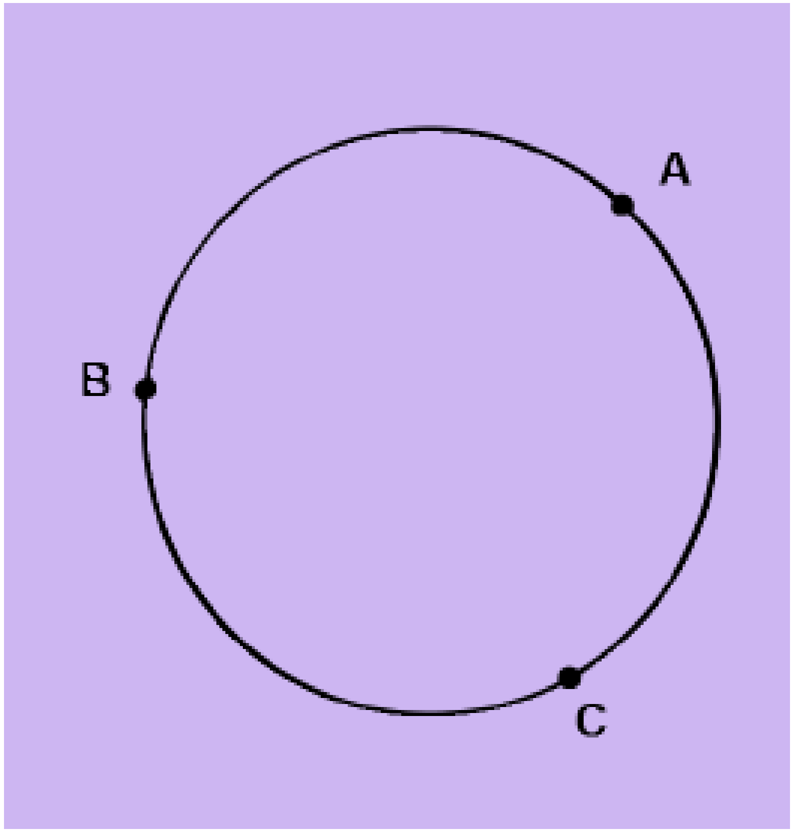
Notação: Escreveremos A * B * C para dizer que o ponto B está entre os pontos A e C.

- Axioma de ordem 1: Se A*B*C, então A,B e C são pontos distintos de uma mesma reta e C*B*A.

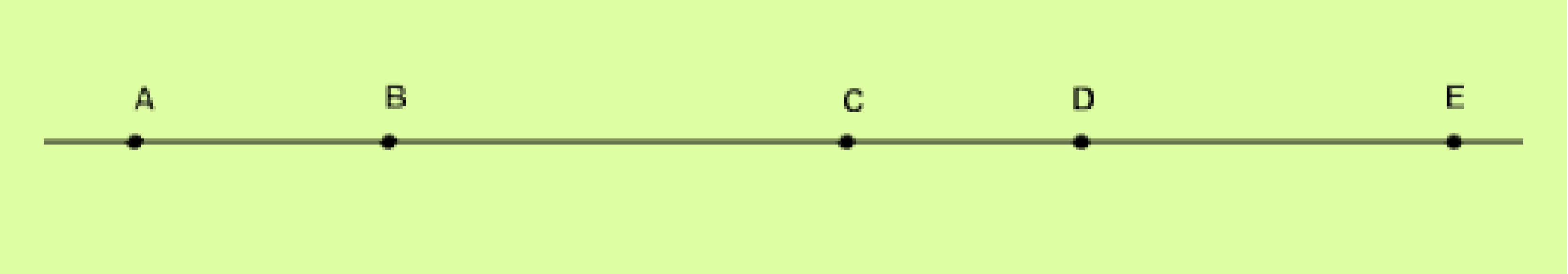
- Axioma de ordem 2: Dados três pontos distintos de uma reta, um e apenas um deles está entre os outros dois.



Este axioma assegura que uma reta não é um círculo, onde não temos a noção bem clara de um ponto está entre outros dois.



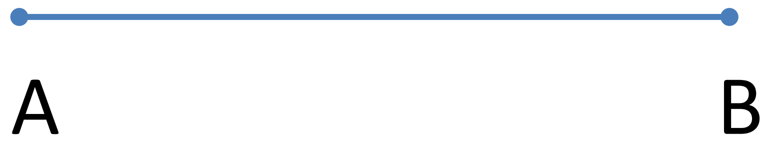
Axioma de ordem 3: Dados dois pontos distintos B e D; existem pontos A,C e E pertencentes à reta contendo B e D; tais que A*B*D, B*C*D e B*D*E.



Como consequência deste axioma, temos que a reta possui infinitos pontos.

De fato, suponha que a reta tivesse um número finito n de pontos P1, ..., Pn que enumeramos de modo que P1*P2*P3*...*Pn. Pelo Axioma de ordem 3, existe Q tal que P1*Pn*Q. Logo encontramos mais um ponto Q sobre a reta e Q não é igual a nenhum dos Pi’s.

Definição. Sejam dois pontos distintos A e B, o segmento AB é o conjunto de todos os pontos entre A e B mais os pontos extremos A e B.



Definição. A semirreta com origem em A e contendo B é o conjunto dos pontos C tais que A*B*C mais o segmento AB, sendo representada por S_{AB}.

Proposição. Para quaisquer dois pontos *A* e *B* tem-se:

a) $S_{AB} \cup S_{BA}$ = reta determinada por *A* e *B*.

b) $S_{AB} \cap S_{BA} = AB$.

Demonstração:

a) Seja m a reta determinada por A e B. Da definição de semirreta, segue imediatamente que $S_{AB} \cup S_{BA} \subset m$.

Vamos provar agora que $S_{AB} \cup S_{BA} \supset m$. Seja C pertence à reta m. Então o Axioma de Ordem 2 implica somente uma das três alternativas:

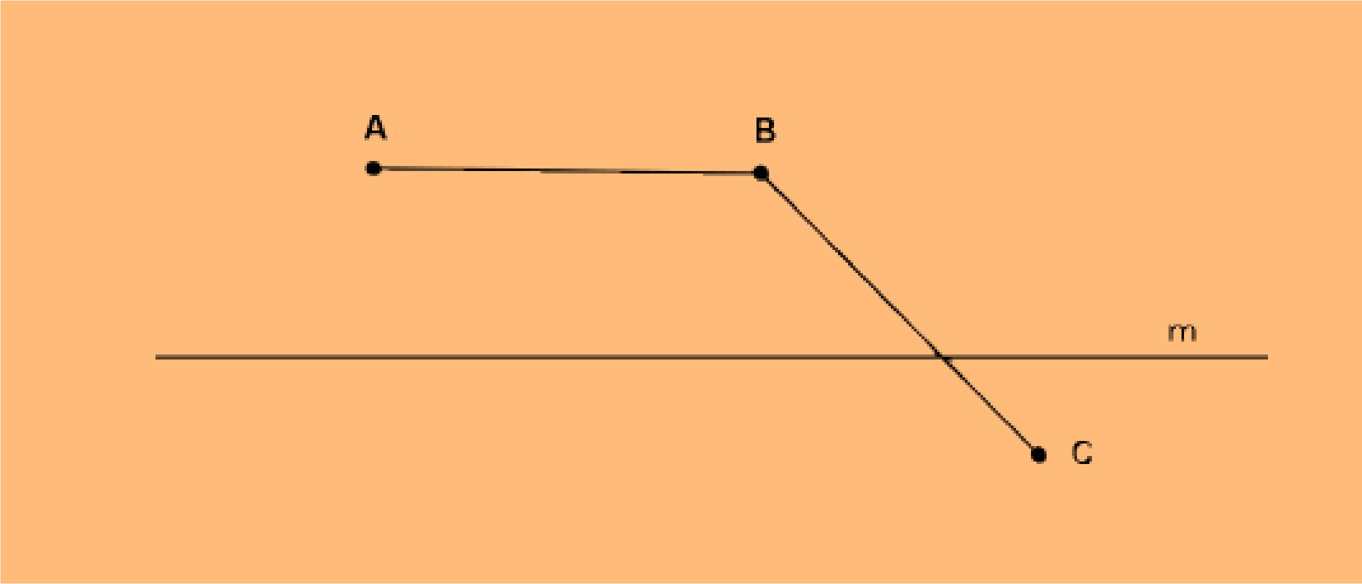
1) $A*C*B$
2) $C*A*B$
3) $A*B*C$

No caso 1, C pertence ao segmento AB; no caso 2 C pertence à semirreta S_{AB} e no caso 3, C pertence a S_{BA}. Em qualquer caso, C pertence a $S_{AB} \cup S_{BA}$. Daí,

$m \subset S_{AB} \cup S_{BA}$.

b)

Definição. Seja uma reta *m*. Dois pontos distintos fora de *m*, *A* e *B*, estão em um mesmo lado da reta *m* se o segmento *AB* não a intersecta, caso contrário dizemos que *A* e *B* estão em lados opostos de *m*.

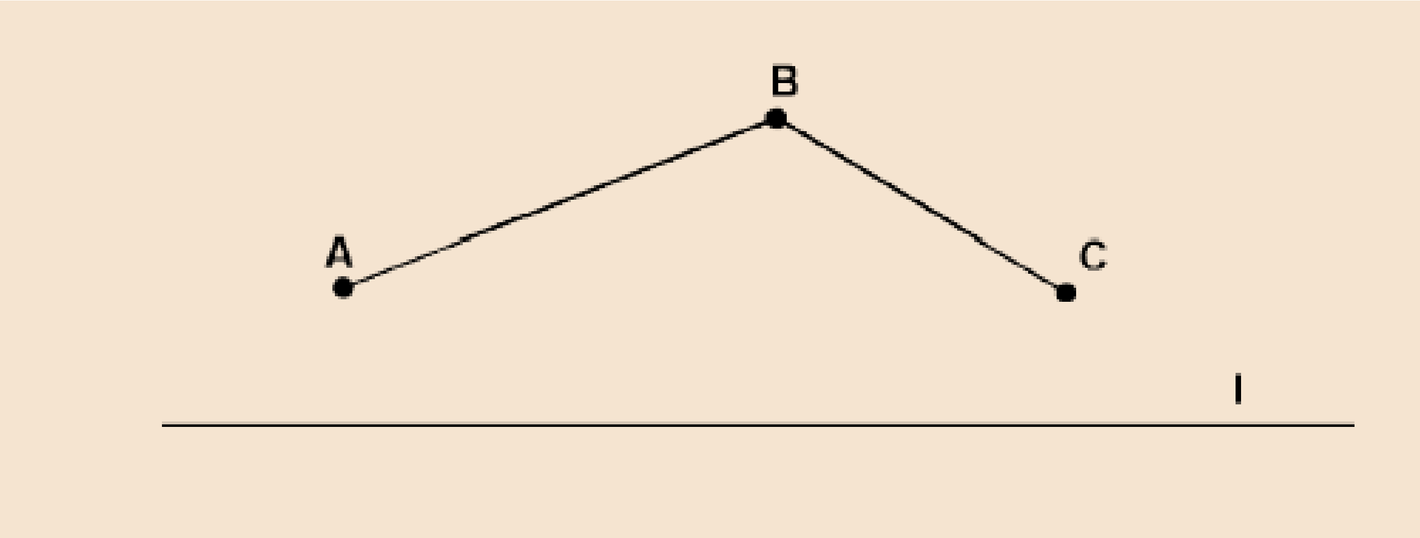


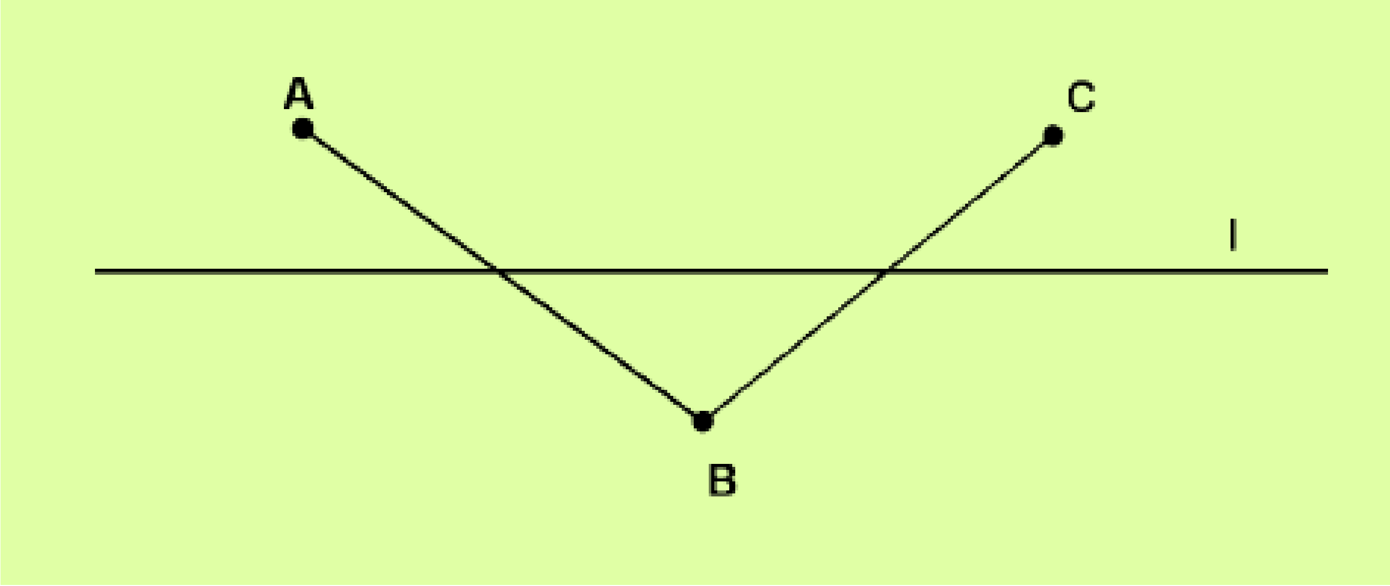
- O conjunto dos pontos de m e dos pontos C tais que A e C estão em um mesmo lado da reta m é chamado de semi-plano determinado por m contendo A e será representado por $P_{m,A}$.

Axioma de ordem 4: Para toda reta *l* e para qualquer três pontos *A, B* e *C* fora de *l*; tem-se:

i) Se *A* e *B* estão no mesmo lado de *l* e *B* e *C* estão no mesmo lado de *l*, então *A* e *C* estão no mesmo lado de *l*.

ii) Se *A* e *B* estão em lados opostos de *l* e *B* e *C* estão em lados opostos de *l*, então *A* e *C* estão no mesmo lado de *l*.


B
A
C
l


A
C
l
B

Corolário. Se A e B estão no mesmo lado de l e B e C estão em lados opostos de l, então A e C estão em lados opostos de l.

Proposição . Toda reta m determina exatamente dois semiplanos distintos cuja interseção é a reta m.

Demonstração

Passo 1: Existe um ponto A fora de l (Proposição já demonstrada).

Passo 2: Existe um ponto O pertencente a l (Axioma de incidência 2).

Passo 3: Existe um ponto B tal que B*O*A (Axioma de ordem 3).

Passo 4: Então A e B estão em lados opostos de l; e l possui pelo menos dois lados.

Passo 5: Seja C um ponto fora de l diferente de A e B. Se C e B não estão no mesmo lado de l; então A e C estão no mesmo lado de l (Axioma de ordem 4). Logo, o conjunto dos pontos fora de l é a união dos semi-planos S_{mA} e S_{mB}

Passo 6: Se C $\in S_{mA} \cap S_{mB}$ com C $\notin$ m, então A e B estão do mesmo lado (Axioma de ordem 4); contradição com o passo 4. Assim, se C $\in S_{mA} \cap S_{mB}$, então C $\in$ m. Portanto, $S_{mA} \cap S_{mB} = m$.

Teorema (Pasch). Se A, B, C são pontos distintos não colineares e m é qualquer reta intersectando AB em um ponto entre A e B; então l também intersecta AC ou BC: Se C não está em m então m não intersecta ambos AC e BC: