Gabarito do Exame de Seleção 2005: Mestrado em Estatística

1) Seja A= { “ As paginas de numeros 1,2,...,n contêm respectivamente, $r_{1,\dots,}r_n$ erros de impressão”}

$$P(A)=\frac{\binom{N}{r_1}\binom{N}{r_2}\cdots\binom{N}{r_n}}{\binom{nN}{r}}=\frac{\prod_{i=1}^{n}\binom{N}{r_i}}{\binom{nN}{r}}$$

2) Seja M_i ={“A i-ésima criança nascida é do sexo masculino”} e F_i ={“A i-ésima criança nascida é do sexo feminino”}

a) $P(M_3 \mid F_1 \cap F_2) = 0{,}5 + 0.\varepsilon_1 - 2 * \varepsilon_2 = 0{,}5 - 2\varepsilon_2$

b) $P(M_2 \cap M_1) = P(M_2 \mid M_1)P(M_1) = (0{,}5 + \varepsilon_1).0{,}5$

c) $P(M_1 \cup M_2) = 1 - P(F_1 \cap F_2) = 1 - P(F_2 \mid F_1)P(F_1) = 1 - (0{,}5 + \varepsilon_2).0{,}5 = 0{,}75 - 0{,}5\varepsilon_2$

d) $-0.5 \le m\varepsilon_1 - f\varepsilon_2 \le 0{,}5$

3) a) $\int_0^2\int_0^x cxydydx = 1 \Rightarrow c = 0{,}5$

b) $$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^x 0{,}5xydy = 0{,}25x^3 & para\ 0<x<2\\ 0; & caso\ contrário\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_y^2 0{,}5xydx = y - 0{,}25y^3 & para\ 0<y<2\\ 0; & caso\ contrário\end{cases}$$

c) Não, basta considerar qualquer ponto no intervalo $0 < y < x < 2$ e verificar que $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$

d) $$f_1(x \mid y)=\begin{cases}0{,}5x(1-0{,}25y^2)^{-1} & para\ 0<y<x<2\\ 0\ ; & caso\ contrário\end{cases}$$

$$E(X \mid y) = \int_y^2 x0{,}5x(1-0{,}25y^2)^{-1}\,dx = \frac{4-0{,}5y^3}{3(1-0{,}25y^2)} \quad para\ 0 < y < 2$$

Portanto $E(X \mid Y) = \dfrac{4-0{,}5Y^3}{3(1-0{,}25Y^2)}$ é a variável aleatória solicitada.

4) a) Pela desigualdade de Chebyshev :

$$P\left(\left\|\sum_{i=1}^{100} X_i - 97\right\| > 2\right) = P\left(\left\|\overline{X}_n - 0{,}97\right\| > 0{,}02\right) \le \frac{0{,}1^2}{100 * 0{,}02^2} = 0{,}25$$

b) Pelo Teorema Central do Limite

$$P\left(\left\|\sum_{i=1}^{100} X_i - 97\right\| > 2\right) = P\left(\frac{\sqrt{100}\left\|\overline{X}_n - 0{,}97\right\|}{\sigma} > \frac{0{,}02\sqrt{100}}{0{,}1}\right) \approx P(\|z\| > 2) = 0{,}0454$$

c) A desigualdade de Chebyshev é válida para qualquer variável aleatória com variância finita e portanto é mais conservativa.